北一女中科學班甄選入學　數學科範例試題

第一部份：選擇題（每題 10 分，共 20 分）

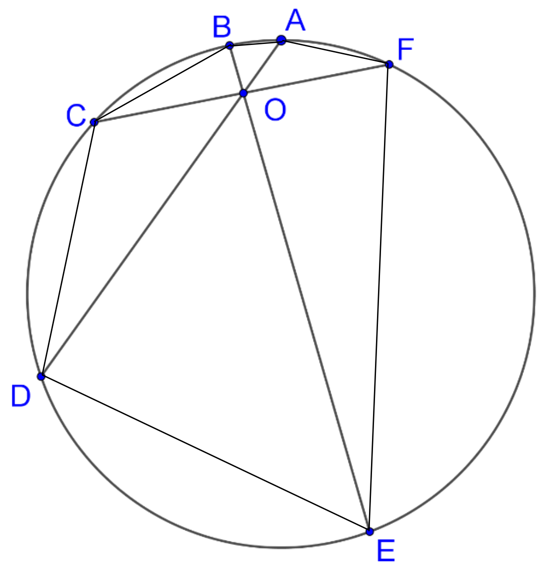
1. 將 1 到 100 用 99 個加號連結，得到$1+2+3+...+100$，請問<u>**至少**</u>要把幾個加號改成減號，才能讓計算結果恰等於 1000？
   (A) 22　(B) 23　(C) 44　(D) 45

2. 小綠在園遊會賣飲料，奶茶一杯賣 40 元，紅茶一杯賣 35 元，綠茶一杯賣 30 元，三種飲料共賣出 100 杯，總賣出金額為 3650 元。假設奶茶、紅茶、綠茶分別賣出 a、b、c 杯，其中 $a\geq 0,\ b\geq 0,\ c\geq 0$，則 (a,b,c) 一共有幾組整數解？
   (A) 35　(B) 36　(C) 65　(D) 66

第二部份：填充題（每題 10 分，共 30 分）

1. 在直角坐標平面上，已知二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形分別和 x 軸所交兩點的距離為 4；和直線 $y=2$ 所交兩點的距離為 8，則此二次函數圖形和直線 $y=6$ 所交兩點的距離為 ________。

2. 已知圓內接六邊形 $ABCDEF$ 中，$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 交於一點。若 $\overline{AB}=1$、$\overline{BC}=3$、$\overline{CD}=5$、$\overline{DE}=7$、$\overline{EF}=9$，則 $\overline{FA}$ 的長度為________。

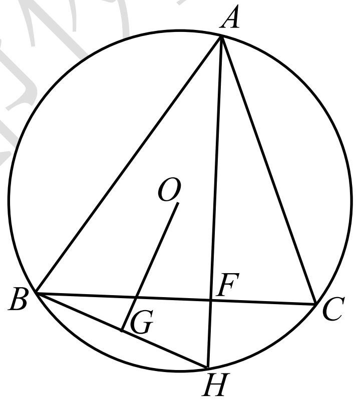


3. 有一組資料：$1,1,1,1,1,\overbrace{a,\ldots,a}^{k個a},6,6,6,6$，其中$1<a<6$，且 a 跟 k 均為正整數。假設這組資料的平均數是 p，中位數是 q，眾數是 r，且 p、q、r 是三個
相異正整數，則$(k,a)=$＿＿＿＿＿。
（備註：中位數－將資料由小而大排列，如果資料的個數是奇數，則最中間的一個資料值，即為中位數；如果資料的個數是偶數，則最中間的兩個資料值的平均數，即為中位數。
眾數－出現次數最多的資料值。）

第三部份：計算證明題（每題 15 分，共 30 分）

1. 如下圖，已知ΔABC外接圓的圓心為 O，弦 $\overline{AH}\perp\overline{BC}$ 於點 F，

G 為 $\overline{BH}$ 的中點。試證明：$\overline{AC}=2\overline{OG}$



2. 在所有正整數中，將只由$2,0,1,9$ 這四個數字構成的數挑選出來，由小至大排成一個數列：$1,2,9,10,11,12,19,20,\ldots$
   (1) 這個數列的第 64 項為何？
   (2) 在這個數列中，2019 是第幾項？
   (3) 這個數列的第 1000 項為何？

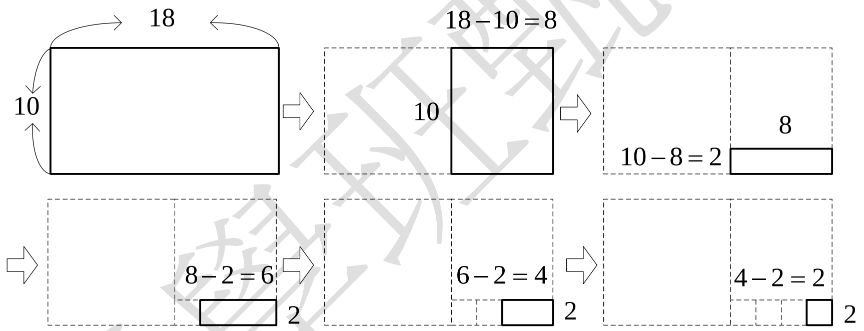
第四部份：思考題，請閱讀下列文章：（共 20 分）

在國中我們學過的數有：3、$\frac{3}{7}$、$\sqrt{2}$...，這些數如果可寫成分數，我們稱為**有理數**，例如：$3=\frac{3}{1}$、$\frac{3}{7}$皆是有理數。但$\sqrt{2}$無法寫成分數形式，是個「**不是有理數的數**」，我們稱為**無理數**。那麼「不是有理數的數」（即無理數）是什麼呢？

不妨從有理數（rational number）的語源來看：ration 源自於拉丁語的 *logos* （英文是 ratio，意思為比），原意是「可表達的」。換言之，有理數是「**可表達的數**」，即可寫成兩個整數之比。進一步，我們可以化成最簡分數的形式$\frac{q}{p}$，其中 p,q 為互質的整數，p 不為 0。例如：$\frac{10}{18}=\frac{2\times5}{2\times9}=\frac{5}{9}$。如果用兩個線段長來說，表示 10 和 18 可以找到基本單位長 2 量盡它們，我們稱之為「**可公度量的**」（commensurable），又例如$\frac{4}{5}$，4 和 5 可以找到基本單位長 1 量盡它們，所以也是可公度量的。反之，如果無法表示成分數形式，代表兩個線段長無法找到基本單位長同時量盡，就稱為「**不可公度量的**」（incommensurable）。

可公度量的說明：

給定長 18 cm，寬 10 cm 的長方形紙片一張，今剪去一個最大正方形後，將剩下的長方形紙片再剪去一個最大正方形，如此繼續做，直到剩下的的紙片是正方形才停止，則最後剩下的正方形邊長為 2cm，如下圖。所以就可將 18，10 用 2 當基本單位來度量，即 $18=9\times2$ ；$10=5\times2$：



用現在的話語來說，也就是 18 和 10 這兩個數，可以 2 當基本單位長來度量，所以$\frac{18}{10}$是有理數。

歐幾里得《幾何原本》第十卷命題 2：

如果從兩不等量的大量中連續減去小量，直到餘量小於小量，再從小量中連續減去餘量直到小於餘量，如此一直作下去，當所餘的量永遠不能量盡它前面的量時，則兩量不可公度。

根據上面的說明，我們要來推導$\sqrt{2}$與 1 是不可公度量的，藉以說明$\sqrt{2}$是無理數。我將利用下面的圖形說明！

下圖(一)中 $ABCD$ 為一正方形，欲利用此圖說明 $\overline{AC}$ 、$\overline{AD}$ 不可公度，即將 $\overline{AC}$ 、$\overline{AD}$ 不斷的互減，並說明兩個線段長無法找到基本單位長同時量盡，就可稱 $\overline{AC}$ 、$\overline{AD}$ 為「**不可公度量的**」。

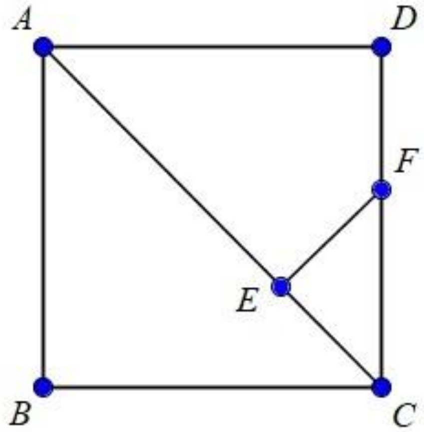
試回答下列問題：

1-1.

如圖(一)，在 $\overline{AC}$ 中量測一線段長 $\overline{AE}=\overline{AD}$，

過 E 做 $\overline{AC}$ 的垂直線交 $\overline{CD}$ 於 F 點，

試證明：$\overline{DF}=\overline{EC}$ 。（5 分）

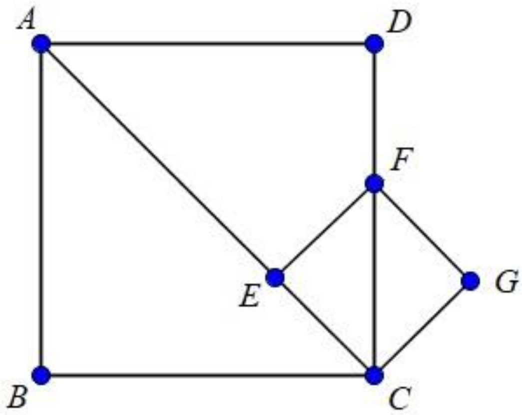


圖（一）

1-2.

如圖(二)，承 1-1，做一正方形 $CEFG$，如果存在一基本單位長 d，可量盡 $\overline{AC}$ 、$\overline{AD}$，

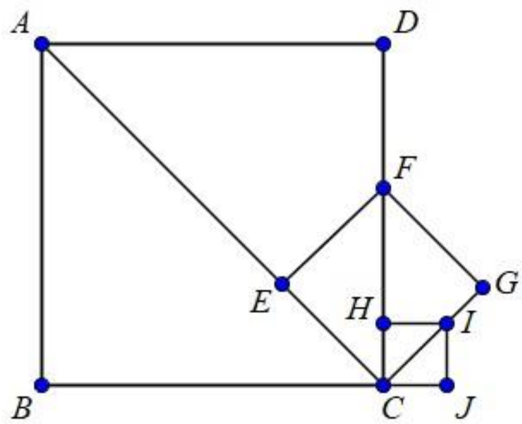
試說明 d 也可量盡 $\overline{CF}$ 、$\overline{CE}$ 。（5 分）



圖（二）

1-3.

如圖(三)，令 $\overline{AD}=1$，承 1-2 概念，試說明下圖中的小正方形 $HIJC$ 如何做出？並依此概念推廣，證明 $\sqrt{2}$ 與 1 是不可公度量。（10 分）



圖（三）